数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 161-166

Hurwitz の定理の特性根解析への応用

大阪府立大学大学院工学研究科　原　惟行 (Tadayuki Hara)
Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
大阪電気通信大学工学部　坂田定久 (Sadahisa Sakata)
Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University

線形のスカラー積分微分方程式

$$x'(t) = ax(t) - b\int_{t-h}^{t} x(s)ds \tag{E}$$

を考える．ここで $a, b \in \mathbb{R}$, $h > 0$ とする．方程式 (E) の零解が UAS になるための必要十分条件を求める．$a > 0$ の場合が難しいが，[1] で次の２つの定理が得られている．

Theorem A. Let $a^2 < 2b$. Then the zero solution of (E) is UAS
$\iff \quad \dfrac{a}{b} < h < \dfrac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \cos^{-1} \dfrac{a^2 - b}{b}$

Theorem B. Let $a^2 > 2b$. Then the zero solution of (E) is not UAS.

この結果，$a^2 = 2b$ の場合だけが未解決であり，次の Conjecture が得られている．

Conjecture. Let $a > 0$ and $a^2 = 2b$. The zero solution of (E) is not UAS for all $h > 0$.

この Conjecture が解決されれば，$a > 0$ のとき

Theorem 1. The zero solution of (E) is UAS
$\iff \quad a^2 < 2b$ and $\dfrac{a}{b} < h < \dfrac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \cos^{-1} \dfrac{a^2 - b}{b}$

が成立する．従って，$a \leq 0$ の場合と Theorem 1 を合わせると (E) の ab-stability region が得られる．

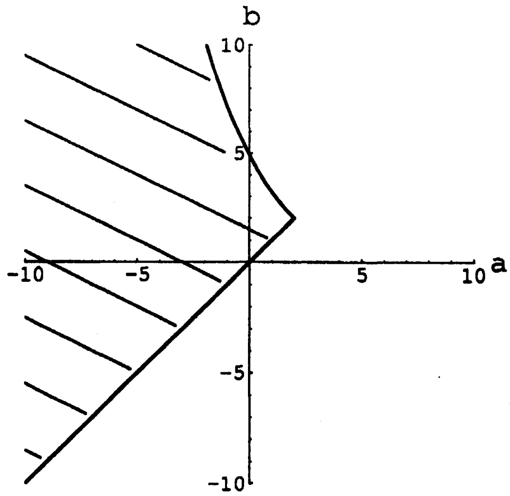

図1 ab–stability region

予想の解決

方程式 (E) の特性方程式は

$$\lambda - a + b\int_{-h}^{0} e^{\lambda s} ds = 0 \tag{1}$$

であり，$a^2 = 2b$ のとき特性方程式 (1) は

$$P(\lambda) \equiv \lambda - a + \frac{a^2}{2}\int_{-h}^{0} e^{\lambda s} ds = 0 \tag{2}$$

となる.

命題 1. $P(\lambda) = 0$ が $\lambda = 0$ を根に持つのは $h = \frac{2}{a}$ のときのみ
$\Longleftrightarrow \quad a^2 < 2b$ and $\frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2 - b}{b}$

$\because$ (2) 式により

$P(0) = 0 \leftrightarrow -a + \frac{a^2}{2}\int_{-h}^{0} 1 ds = 0$

$\Longleftrightarrow -a + \frac{a^2 h}{2} = 0$

$\Longleftrightarrow h = \frac{2}{a}$ $\square$

命題 2. $h \neq \frac{2}{a}$ のとき $P(\lambda)=0$ は虚軸上に根を持たない.
$\iff$ $a^2 < 2b$ and $\frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b-a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2-b}{b}$

$\because$ $\lambda = i\omega$ $(\omega \neq 0)$ なる根があるとしよう. (2) 式により

$$P(\lambda) \equiv \lambda - a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^{0} e^{\lambda s} ds = 0$$

なので

$$\begin{aligned} P(i\omega) &= i\omega - a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^{0} e^{i\omega s} ds \\ &= i\omega - a + \frac{a^2}{2i\omega} \left[1 - e^{-i\omega h}\right] = 0 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} & -2\omega^2 - 2ia\omega + a^2 - a^2(\cos\omega h - i\sin\omega h) = 0 \\ \iff\quad & -2\omega^2 + a^2 - a^2\cos\omega h = 0,\ -2a\omega + a^2\sin\omega h = 0 \\ \iff\quad & \cos\omega h = 1 - 2\left(\tfrac{\omega}{a}\right)^2,\ \sin\omega h = \tfrac{2\omega}{a} \\ \Longrightarrow\quad & \cos^2\omega h + \sin^2\omega h = \{1 - 2\left(\tfrac{\omega}{a}\right)^2\}^2 + \left(\tfrac{2\omega}{a}\right)^2 = 1 \\ \Longrightarrow\quad & 1 - 4\left(\tfrac{\omega}{a}\right)^2 + 4\left(\tfrac{\omega}{a}\right)^4 + 4\left(\tfrac{\omega}{a}\right)^2 = 1 \\ \Longrightarrow\quad & \left(\tfrac{\omega}{a}\right)^4 = 0 \\ \Longrightarrow\quad & \omega = 0 \text{ これは矛盾.} \quad \square \end{aligned}$$

故に, 十分大きな h に対して, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ があることがいえれば, $\lambda = \lambda(h)$ の連続性と命題 2 により $h > \frac{2}{a}$ で $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ の存在が示せる.

また $h = 0$ のとき $P(\lambda) = \lambda - a = 0$ より $\lambda = a > 0$ であるから $\lambda = \lambda(h)$ の連続性と命題 2 により $0 < h < \frac{2}{a}$ で $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ の存在はいえる. よって示すべき命題は

命題 3. 十分大きな h に対して, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ である $P(\lambda) = 0$ の特性根 λ が存在する.

である.

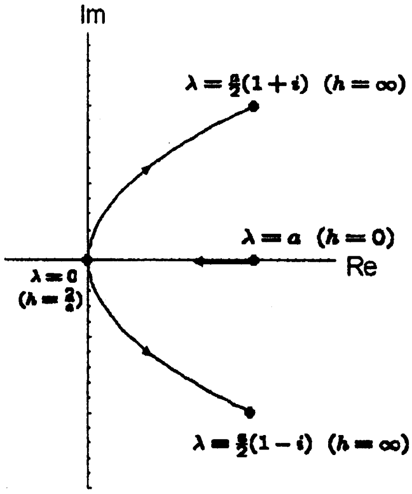

図2　シミュレーションによる $\lambda = a(h=0)$ の根の動き

命題 3 を証明する際のネック

$$P(\lambda)\Big|_{\substack{\lambda=0\\ h=\frac{2}{a}}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}P(\lambda)\Bigg|_{\substack{\lambda=0\\ h=\frac{2}{a}}} = 1 + \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{2}{a}}^{0} sds = 1 - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2}{a}\right)^2 = 0$$

であるから $h = \frac{2}{a}$ のとき $\lambda = 0$ は $P(\lambda) = 0$ の重根である．また特性方程式 (2) を h に関して微分すると

$$\frac{d\lambda}{dh}\Bigg|_{\substack{\lambda=0\\ h=\frac{2}{a}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{1+\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{2}{a}}^{0} sds} = \frac{\frac{a^2}{2}}{0}$$

となり，$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{dh}\Big|_{\substack{\lambda=0\\ h=\frac{2}{a}}}\right) > 0$ を示すことにより証明するというテクニックが使えない．

> Hurwitz の定理
>
> 正則関数列 $f_n(z)$ が単連結な領域 D において定数でない関数 $f_0(z)$ に一様収束するものとする．いま，D の 1 点 z_0 を $f_0(z)$ の零点とし，D 内に z_0 を中心とする円 C を描いて，C の上では $f_0(z) \neq 0$ とする．このとき十分大きな全ての n に対して $f_n(z)$ は円 C の内部 Ω において $f_0(z)$ と同数の零点をもつ．

Hurwitz の定理を特性方程式 (2) に適用して命題 3 を証明する．

$z_0 \equiv \frac{a}{2}(1+i)$ として D, Ω, C, $f_n(z)$, $f_0(z)$ を次のように定める．

$$D \equiv \{z : \tfrac{a}{4} < \operatorname{Re} z < \tfrac{3}{4}a,\ \tfrac{a}{4} < \operatorname{Im} z < \tfrac{3}{4}a\}$$
$$\Omega \equiv \{z : |z - z_0| < \tfrac{a}{6}\}$$
$$C \equiv \{z : |z - z_0| = \tfrac{a}{6}\}$$

$$f_n(z) \equiv z - a + \frac{a^2}{2}\int_{-n}^{0} e^{zs} ds$$

$$f_0(z) \equiv z - a + \frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{zs} ds$$

領域Dでは$z \neq 0$であるから積分をすると

$$f_n(z) = z - a + \frac{a^2}{2z}(1 - e^{-nz})$$

$$f_0(z) = z - a + \frac{a^2}{2z} = \frac{1}{2z}(2z^2 - 2az + a^2)$$

従って,

$$f_0(z) = 0 \implies z = \tfrac{a}{2}(1 \pm i)$$

右半平面で$f_0(z)$の零点は$\frac{a}{2}(1 \pm i)$のみである．特に，領域Dでは$f_0(z)$の零点は$\frac{a}{2}(1 + i)$ $(= z_0)$のみであるから，C上では$f_0(z) \neq 0$．またDで$f_n(z)$が正則であることも明らかである．

次に，Dで$f_n(z)$が$f_0(z)$に一様収束することを示そう．領域Dで$z = x + iy$とすると$\frac{a}{4} < x < \frac{3}{4}a$であり

$$|e^{-nz}| = \left|e^{-n(x+iy)}\right| = e^{-nx} < e^{-\frac{a}{4}n} \to 0 \quad as\ n \to \infty$$

より

$$e^{-nz} \rightrightarrows 0 \quad on\ D \quad as\ n \to \infty$$

故に,

$$f_n(z) \rightrightarrows f_0(z) \quad on\ D \quad as\ n \to \infty$$

従って，Hurwitzの定理により$^{\exists}N \in \mathbb{N} : {}^{\forall}n \geqq N$に対して，$f_n(z)$は$C$の内部$\Omega$で$f_0(z)$と同数の零点を持つ．すなわち$f_n(z)$は$\Omega$で唯1つの零点を持つ．この零点を$\lambda_0$とすると,

$$\lambda_0 - a + \frac{a^2}{2}\int_{-n}^{0} e^{\lambda_0 s} ds = 0$$

であり，$\lambda_0 \in \Omega$より

$$\mathrm{Re}(\lambda_0) \geqq \tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{6} = \tfrac{a}{3} > 0$$

すなわち $h = n \geqq N$ のとき特性方程式 (2) は $\mathrm{Re}(\lambda_0) \geqq \frac{a}{3} > 0$ なる特性根を持つ.
□

以上により，$a > 0$ のとき，Theorem 1 は成立する.

参考文献

1 M. Funakubo, T. Hara and S. Sakata, On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type, *J. Math. Anal. Appl.*, 324 (2006) 1036-1049.

2 A.Hurwitz, Über die Nullstellen der Bessel'schen Funktion, *Math. Ann.*, 33 (1889) 246-266.

3 J.L. Schiff, Normal Families, Springer-Verlag, New York, 1993.

4 能代　清, 初等函数論, 培風館, p.170, 1954.